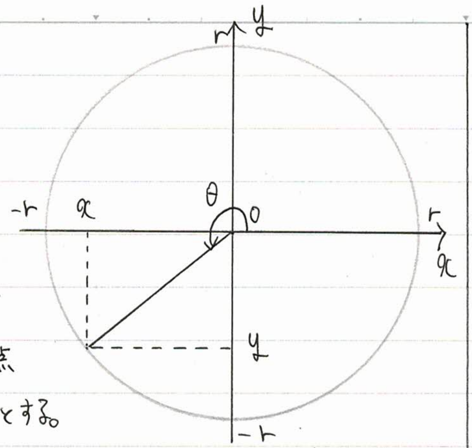
Date

1999年 東大数学 文系第1問 ①

(1)

数研出版 教科書



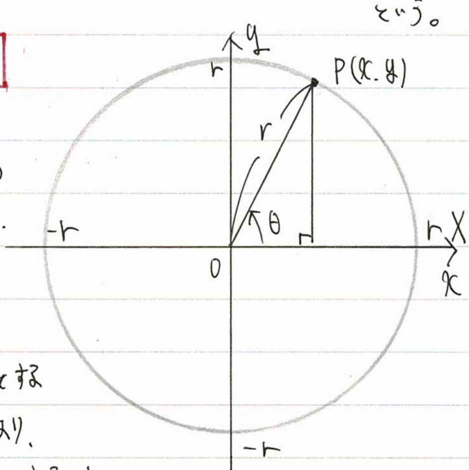
座標平面上で x軸正の部分を始線にとり、一般角θの動径と、原点を中心とする半径rの円との交点Pの座標を(x, y)とする。

このとき、$\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{y}{x}$ の各値は、円の半径rに無関係で、角θだけによって定まる。そこで、三角比の場合と同様に、

$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

と定め、これらをそれぞれ、一般角θの正弦、余弦、正接という。

啓林館 教科書



点Oを原点とする座標平面上で、x軸の正の部分を始線OXとし、一般角θの動径をOPとする。

点Pが、原点Oを中心とする半径rの円周上にあり、その座標を(x, y)とするとき、

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}$$

の値は半径rに関係なく、θだけによって定まる。

そこで、θが一般角の場合にも、

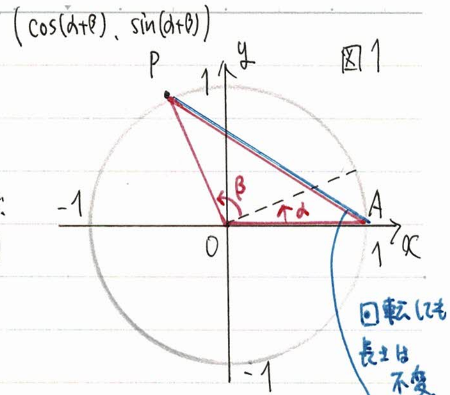
$$\sin\theta = \frac{y}{r} \qquad \cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$ と定義し、

それぞれ、θの正弦、余弦、正接という。

(※どちらも、$\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ のような $x=0$ となる値に対して $\tan\theta$ が定義されないことが明記されているが、東大入試では問われていないので割愛した。)

(2)

解法1

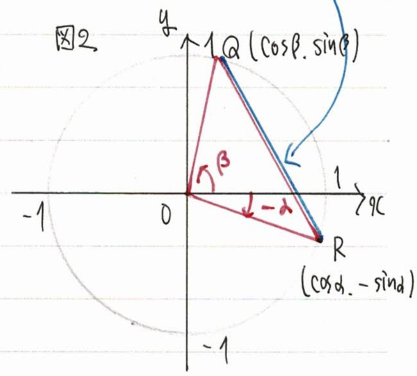


右のようにα, βの角をとる。

$P(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ なので、

$AP^2 = \{\cos(\alpha+\beta) - 1\}^2 + \sin^2(\alpha+\beta)$

$= 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$



次に、2点P, Aを原点を中心に $-\alpha$ だけ回転させた点をそれぞれQ, Rとおくと、

$Q(\cos\beta, \sin\beta)$

$R(\cos(-\alpha), \sin(-\alpha))$

$= (\cos\alpha, -\sin\alpha)$ となり、

また、AP = RQ である。

$RQ^2 = (\cos\beta - \cos\alpha)^2 + (\sin\beta + \sin\alpha)^2$

$= \cdots$

$= 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

よって、$AP^2 = RQ^2$ より

$2 - 2\cos(\alpha+\beta) = 2 - 2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$

$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ …①

①の両辺のβを$-\beta$でおき換えると、

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ …②

これも加法定理。

②の両辺のαを $\frac{\pi}{2}-\alpha$ でおき換えると、

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\sin\beta$

解法2 図2の△OQRで余弦定理を使うと、

$RQ^2 = OR^2 + OQ^2 - 2\cdot OR\cdot OQ\cdot\cos\angle ROQ$

$(\cos\alpha-\cos\beta)^2 + (\sin\alpha+\sin\beta)^2 = 1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\beta+\alpha)$

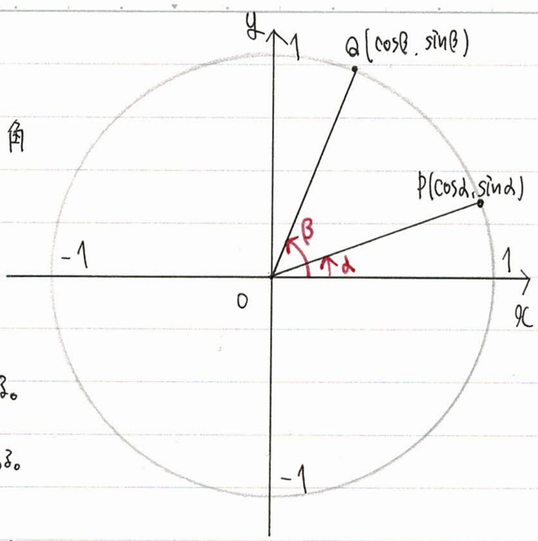
$1+1-2(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$

$\therefore \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(以下略)

1999年　東大数学　文系第1問 ②

解法3



右図のように点と角を定義する。

$\overrightarrow{OP}=(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$\overrightarrow{OQ}=(\cos\beta, \sin\beta)$

とおける。

また $|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OQ}|=1$ である。

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|\cos\angle POQ$ なので　←内積の利用

$(\cos\alpha, \sin\alpha)\cdot(\cos\beta, \sin\beta) = 1\times 1\times \cos(\beta-\alpha)$

$\therefore\ \cos(\beta-\alpha) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

α を $-\alpha$ に置換して、

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ …①　//

(以下略)

解法4

複素数平面の利用 (当時は数B)

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) = \cos(\alpha+\beta)+i\sin\beta$

$(\text{左辺}) = (\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta) + i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$

複素数の相等より　実部同士、虚部同士が等しい。

$$\begin{cases}\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\end{cases}$$ //